

习 题 2.1

1. E 是 X 的集类, 在下列一些情况下分别求出 $R(E)$.

(i) $E = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$.

(ii) X 是数直线, E 是 X 中开区间全体.

(iii) X 是数直线, E 是形如 $(-\infty, a)$ 的开区间全体.

2. 求出习题 1 中各种情况下的 E 所张成的代数.

3. 证明直线上的开集、闭集、有理点全体、无理点全体等均属于 $S(R_0)$.

4. 设 G 是直线上开区间全体所成的类. 证明 R_0 、 G 张成的 σ -环是一致的, 即 $S(R_0) = S(G)$.

5. 定义 2.1.4 设 $\{f_\lambda(x) | \lambda \in \Lambda\}$ 是定义在集 X 上的一族实有限函数. 对任何实数 c , 令 $E_{\lambda c} = \{x | c < f_\lambda(x)\}$. 由类 $E = \{E_{\lambda c}\}$ 张成的 X 上的 σ -代数称为由函数族 $\{f_\lambda(x) | \lambda \in \Lambda\}$ 产生的 (或决定的) σ -代数.

当 X 是数直线时,

(i) 求出由一个函数 $\text{sgn } x$ 产生的 σ -代数.

(ii) 求出由一个函数 $E(x)$ (不超过 x 的最大整数函数) 产生的 σ -代数.

(iii) 求证由一个函数 $f(x) = x^3$ 产生的 σ -代数是 $S(R_0)$.

1. (i) $R(E) = \{ \bigcup_{j=1}^n E_j, \bigcap_{j=1}^n E_j, \bigcup_{j=1}^n \bar{E}_j, \bigcap_{j=1}^n \bar{E}_j \mid n=1, 2, \dots \}$

(ii) $E = \{ (a_i, b_i) \mid a_i, b_i \in \mathbb{R} \}$

$A \cup B$ (A 是有限个开区间的和集, B 是有限集,

且 A, B 中可以有 1 个或 2 个都是空集) ?

(iii) 用 R^0 表示有限个左闭右开区间的和集全体所成的集类

则 $R(E) = A \cup B$ (其中 $A \in R^0, B \in E$)

3. R_0 : 是由 E 中的有限个左开右闭的有限区间的和集

$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n]$ 全体所成的集类

$X = \left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \right\}$ 某些子集

X 的子集所成的集类

$S(R_0)$: 由集类 R_0 张成的 σ -环. $\textcircled{1} S(R_0)$ 是 σ -环.

$\textcircled{2} R_0 \subset S(R_0)$ $\textcircled{3}$ 其它包含 R_0 的 σ -环 $\supset S(R_0)$

σ -环: 对“可列和”, “差”运算封闭.

4. G 是直线上开区间全体所成的类
 $\{(a_i, b_i)\}$

要证 $S(R_0) = S(G)$

$\Rightarrow S(R_0)$ 是包含 R_0 的最小 σ -环. 那要证 $S(G)$ 也是包含 R_0 的 σ -环: 已知 $S(G)$ 已是环, 那要证 $R_0 \subset S(G)$
 $(a, b + \frac{1}{n}) \in G$ $(a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a, b + \frac{1}{n}) \in S(G)$
 那 $(a, b] \in S(G)$. (对于可数交封)

又: R_0 中的元素都是有限个 $(a_i, b_i]$ 的并, 则 $R_0 \subset S(G)$
 则 $S(R_0) \subset S(G)$

$\Leftarrow S(G)$ 是包含 G 的最小 σ -环, 那要证 $S(R_0)$ 也是包含 G 的 σ -环: 已知 $S(R_0)$ 已是环, 那要证 $G \subset S(R_0)$
 G 的元素是直线上开区间, 即: "开区间的并"
 $(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a, b - \frac{1}{n}] \in S(R_0)$
 (可数并的封闭)

则 $G \subset S(R_0)$

则 $S(G) \subset S(R_0)$

综上: $S(G) = S(R_0)$

5. 定义 2.1.4 设 $\{f_\lambda(x) | \lambda \in \Lambda\}$ 是定义在集 X 上的一族实有限函数. 对任何实数 c , 令 $E_{\lambda c} = \{x | c < f_\lambda(x)\}$. 由类 $E = \{E_{\lambda c}\}$ 张成的 X 上的 σ -代数称为由函数族 $\{f_\lambda(x) | \lambda \in \Lambda\}$ 产生的 (或决定的) σ -代数.

当 X 是数直线时,

$$\text{sgn } x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

(i) 求出由一个函数 $\text{sgn } x$ 产生的 σ -代数. $X = (-\infty, +\infty)$

(ii) 求出由一个函数 $E(x)$ (不超过 x 的最大整数函数) 产生的 σ -代数.

(iii) 求证由一个函数 $f(x) = x^3$ 产生的 σ -代数是 $S(R_0)$. $X = (-\infty, +\infty)$

(iv) 由类 $E = \{E_{\lambda c}\}$ 张成的 X 上的 σ -代数称为由函数族 $\{f_\lambda(x) | \lambda \in \Lambda\}$ 产生的 σ -代数
 $\{x | c < \text{sgn } x\}$ σ -环 + $X \in \mathcal{F}(E)$ $\text{sgn } x$

$\mathcal{F}(E)$ 是 σ -环. "可列和" "差封闭" $E \subset \mathcal{F}(E) + \mathcal{F}(E)$

$$c > 1: \emptyset \quad 0 \leq c < 1: (0, +\infty) \quad -1 \leq c < 0: [-\infty, 0)$$

$$c < -1: (-\infty, +\infty) \quad \sigma\text{-代数} = \{ (0, +\infty), \emptyset, (-\infty, 0), [-\infty, 0), (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \}$$

$$\text{证: } E_c = \{x \mid c < x\} = \{x \mid x > \sqrt[3]{c}\} = (\sqrt[3]{c}, +\infty)$$

$$\text{可得类 } \mathcal{E} = \{E_c\} = \{(\sqrt[3]{c}, +\infty) \mid c \in \mathbb{R}\}$$

由 $\mathcal{E}$ 张成的在 X 上的 σ -代数记为 $S(\mathcal{E})$

$$\text{要证 } S(\mathcal{E}) = S(\mathcal{R}_0)$$

$$\text{①} \Rightarrow S(\mathcal{E}) \subset S(\mathcal{R}_0) \quad \text{即要证 } \mathcal{E} \subset S(\mathcal{R}_0)$$

$$(\sqrt[3]{c}, +\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (c, c+n] \in S(\mathcal{R}_0)$$

$$\text{则 } \mathcal{E} \subset S(\mathcal{R}_0), \text{ 即可得 } S(\mathcal{E}) \subset S(\mathcal{R}_0)$$

$$\text{②} \Leftarrow \text{要证: } S(\mathcal{E}) \supset S(\mathcal{R}_0), \text{ 即要证 } \mathcal{R}_0 \subset S(\mathcal{E})$$

$\mathcal{R}_0$ 中的元素是有限个 $(a_i, b_i]$ 的并 (c < d)

$$(c, +\infty) \text{ 的交集: } (-\infty, c] \text{ 则 } (-\infty, d] \in S(\mathcal{E})$$

由 c 的连续性

$$\text{即可得: } S(\mathcal{E}) \ni (c, +\infty) \cap (-\infty, d] = (c, d] \in \mathcal{R}_0$$

$$\text{则: } \mathcal{R}_0 \subset S(\mathcal{E}) \quad \text{得: } S(\mathcal{R}_0) \subset S(\mathcal{E})$$

$$\text{综上: } S(\mathcal{E}) = S(\mathcal{R}_0)$$

(iv) 记 $\mathcal{R}_0[a, b)$ 是 $[a, b)$ 中所有左闭右开区间全体所张成的环, $\{x\}$ 是 x 的正小数部分函数. 求出由 $\{x\}$ 产生的 σ -代数与 $\mathcal{R}_0[0, 1)$ 的关系.

(v) $\{f_\lambda(x) \mid \lambda \in \Lambda\}$ 是直线上周期为 2π 的连续函数全体, 求出由 $\{f_\lambda(x) \mid \lambda \in \Lambda\}$ 产生的 σ -代数与 $\mathcal{R}_0(0, 2\pi]$ 的关系 ($\mathcal{R}_0(0, 2\pi]$ 是 $(0, 2\pi]$ 中左开右闭区间全体所张成的环).

6. 证明定理 2.1.2.

7. 设 $\mathcal{R}$ 是 X 上的一个集类. 证明 $\mathcal{R}$ 是环的充要条件是下面 (i)、(ii) 中的任何一个.

(i) $\mathcal{R}$ 对任意有限个互不相交集的和运算和减法运算封闭.

(ii) R 对运算 “ Δ ”、“ $\cap$ ”、“ $-$ ” 封闭.

8. R 是 X 上的一个集类. 证明 R 是代数的充要条件是对 “ $\cup$ ”、“ $\cap$ ”、“余” 运算封闭.

9. 设 X 是一集, R 是 X 的某些子集所成的环, A 是 X 的一个子集, 证明 $S(R) \cap A = S(R \cap A)$. 当 R 是代数或 $A \in R$ 时, $S(R) \cap A$ 是 A 上的 σ -代数.

10. 设 X 是一集, R 是 X 的某些子集所成的环. M 也是由 X 的某些子集所成的环, 它有如下的性质 (i) $M \supset R$, (ii) 当 $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ 是 M 中一系列互不相交的集时, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in M$. 证明 $M \supset S(R)$.

11. 设 R 是实数直线 E^1 中的一个环, 对每个 $E \in R$, 作 $R^2 = \{(x, y) | x, y \in E^1\}$ 中形如 $\tilde{E} = \{(x, y) | x, y \in E\}$ 的集. 当 E 在 R 中变化时, 这种 $\tilde{E}$ 全体记为 $\tilde{R}$. 求出 $S(\tilde{R})$ 与 $S(R)$ 的关系.

12. E 是 X 上的一个集类. 证明对 $S(E)$ 中任何一个集 E , 必存在 E 中一系列集 $\{E_i\}$, 使得 $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$.

13. 完成引理 2 的全部证明.

5.22

7. R 是 X 的一个集类.

(i) R 是环 $\Leftrightarrow R$ 对任意有限个互不相交的集的和运算和减法运算封闭

$\Rightarrow R = \{A_i\}$ R 是环 $A_1, A_2 - A_1, A_3 - (A_2 \cup A_1),$

$A_n - (\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i)$ 互不相交设为 $E_i (i=1, \dots, n)$

列 $\bigcup_{i=1}^n E_i = A_n \in R$. 列 R 对任意有限个互不相交的集的和运算封闭.

$\Leftarrow$ 由定义易知

(ii) $\Delta: A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

R 是环 $\Leftrightarrow R$ 对运算 “ Δ ”、“ $\cap$ ”、“ $-$ ” 封闭

$\Rightarrow R$ 对 “ Δ ”、“ $-$ ” 封闭, $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

$A, B \in R$ 列 $A - B \in R, B - A \in R \Rightarrow (A - B) \cup (B - A) \in R$

即 $A \Delta B \in R, A \cap B = A - (A - B) \in R$

列对 $\Delta, \cap$ 封闭

二 也易证



$$A_1 \cup A_2 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_1 \cap A_2)$$

10. 设 X 是一集, R 是 X 的某些子集所成的环. M 也是由 X 的某些子集所成的环, 它有如下性质 (i) $M \supset R$, (ii) 当 $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ 是 M 中一系列互不相交的集时, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in M$. 证明 $M \supset S(R)$.

10. 证明: 要证 $M \supset S(R)$, $S(R)$ 是 R 张成的 σ -环.

又: $M \supset R$, 则可证 M 是 R 的 σ -环 (已知 M 为环)

(iv) M 对一系列互不相交的集 $E_1, \dots, E_n$ 的可列和封闭. 即 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in M$.

$$E_1 = A_1, E_2 = A_2 - A_1, E_3 = A_3 - (A_1 \cup A_2) \sim \\ E_n = A_n - (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}), \quad A_1, \dots, A_n \in M$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in M$$

对任意集的可列和封闭 $\checkmark$

证

习 题 2.2

1. 设 $g(x)$ 是直线上的一个单调增加函数, 而且 $g(x) = g(x+0)$. 当 $(\alpha, \beta] \in P$ 时定义

$$g((\alpha, \beta]) = g(\beta) - g(\alpha).$$

证明这个集函数 g 可以唯一地延拓成 R_0 上的测度.

2. 设 P' 为直线上的开区间的全体, 作 P' 上的集函数 m' 如下: $m'((\alpha, \beta)) = \beta - \alpha$, 证明 m' 必可唯一地延拓成 $R(P')$ 上的测度.

3. 设 P 是平面上左下开右上闭的矩形 $(a, b] \times (c, d] = \{(x, y) | a < x \leq b, c < y \leq d\}$ 全体, 作 P 上的集函数 m 如下

$$m((a, b] \times (c, d]) = (b - a)(d - c).$$

证明 m 必可唯一地延拓成 $R(P)$ 上的测度.

4. 设 μ 是直线上环 R_0 上的测度. 证明: 存在单调增加右连续的函数 $g(x)$, 使得 $\mu(E) = g(b) - g(a)$ ($E = (a, b]$) 的必要条件是: 对一切 $(a, b] \in R_0$, $\mu((a, b]) < \infty$ (此即说明: 对 R_0 中每个集

$\mu_g(E)$ ($E \in \mathcal{R}_0$) 的充要条件是对一切 $(a, b] \in \mathcal{R}$, $\mu((a, b]) < \infty$. (此即说明: 对 $\mathcal{R}$ 中每一元素都有有限的 $\mathcal{R}_0$ 上测度必是 g 测度)

5. 举例说明定理 2.2.1 中 (viii) 的条件 $\mu\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n\right) < \infty$, (ix) 的条件 $\mu\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n\right) < \infty$, (x) 的条件 $\sum_{n=k}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$ 都不能去掉.

4. 证明: $\Rightarrow$ $\mu(E) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i]\right) = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)$
 $\mu_g(E) = \sum_{i=1}^n (g(b_i) - g(a_i))$ (g 为 $\mathbb{R}$ 上的实值函数, 有限值)
 $\mu((a, b]) = \mu_g((a, b]) = g(b) - g(a) < \infty$

$\Leftarrow$ $\mu((a, b]) < \infty$

要使 $\mu((a, b]) = \mu_g((a, b]) = g(b) - g(a)$
 $= \mu((0, b]) - \mu((0, a])$

$\Rightarrow g(x) = \begin{cases} \mu((0, x]) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\mu((x, 0]) & x < 0 \end{cases}$ ✓

例: $(-2, -1]$ $\mu(-2, 0] - \mu(-1, 0] = \mu(-2, -1]$

接下来验证: 单增右连续.

① $x > 0$ 时 $x \uparrow \Rightarrow \mu((0, x]) \uparrow$ $x < 0$ 时, $x \uparrow \Rightarrow \mu((x, 0]) \downarrow$ 到 g 单增

② 右连续: $\lim_{x \rightarrow x_0} g = \lim_{x \rightarrow x_0^+} g$ 明显成立!

$\Leftarrow$ 得证

证

6. 设 $\{\mu_n\}$ 是环 $\mathcal{R}$ 上一列测度, 并且对一切 $E \in \mathcal{R}$, 以及任何自然数 n , 都有 $\mu_n(E) \leq 1$.
 证明

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mu_n(E) \quad (E \in \mathcal{R}),$$

也是 $\mathcal{R}$ 上测度, 并且满足 $\mu(E) \leq 1, (E \in \mathcal{R})$.

又去掉假设 $\mu(E) \leq 1$, 证明 $\mu(E)$ 仍是 $\mathcal{R}$ 上测度.

7. 设 μ 是环 $\mathcal{R}$ 上测度, 如果对一切 $E \in \mathcal{R}, \mu(E) \leq 1$, 证明 μ 的原子全体最多是可列

集 (这里“原子”是指 R 中一种单点集 $\{x\}$, 但满足 $\mu(\{x\}) > 0$).

8. 设 R 是集 X 上的环, $\{\mu_n\}$ 是 R 上一列测度, 并且对任何 $E \in R$, 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(E)$ 存在, 记为 $\mu(E)$. 证明 μ 是 R 上非负、空集上取值为 0 的有限可加集函数, 并举例说明, μ 未必是 R 上测度.

6. 证明: ① $\mu_n(\emptyset) = 0$ 则 $\mu(\emptyset) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$.

② $\mu_n(E) \geq 0$ 则 $\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mu_n(E) \geq 0$

③ 可列可加: $E_i \cap E_j = \emptyset$

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mu_n\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \xrightarrow[\text{可列可加}]{\mu_n(E) \rightarrow \mu(E)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mu_n(E_i)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mu_n(E_i)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \end{aligned}$$

即 $\mu(E)$ 有可列可加性 是测度

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mu_n(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

$$\text{即: } \mu(E) \leq 1$$

7. 证明: *deep seek*

$A = \{x \in X \mid \{x\} \in R, \mu(\{x\}) > 0\}$ 即为 μ 的原子全体

$A_n = \{x \in X \mid \mu(x) \geq \frac{1}{n}\}$ 含有 n 个不同的点

$x_1, x_2, \dots, x_k$, 则 $\mu(A_n) = \sum_{i=1}^k \mu(x_i) \geq \frac{k}{n}$

则 $k \leq n$. 则 A_n 为有限集

$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 可列个有限集之并 $\Rightarrow$ 至多可列集

≠

8. 设 R 是集 X 上的环, $\{\mu_n\}$ 是 R 上一列测度, 并且对任何 $E \in R$, 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(E)$ 存在, 记为 $\mu(E)$. 证明 μ 是 R 上非负、空集上取值为 0 的有限可加集函数, 并举例说明, μ 未必是 R 上测度. 即“不可列可加”

8. 证明: $\{\mu_n\}$ 是一列测度 ① $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(E) = \mu(E) \geq 0$

② $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$

③ 有限可加: $E = \bigcup_{i=1}^k E_i$, E_i 互不相交

由 μ_n 的有限可加性: $\mu_n(E) = \mu_n(\bigcup_{i=1}^k E_i) = \sum_{i=1}^k \mu_n(E_i)$
 $\mu(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \mu_n(E_i) = \sum_{i=1}^k \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(E_i)$
 $= \sum_{i=1}^k \mu(E_i)$ 有限可加

反例:
(豆包)

更直接的反例: 取 R 为 $\mathbb{N}$ 的所有子集构成的环 (即幂集), 定义

$$\mu_n(E) = \sum_{k \in E} \frac{1}{n} \mathbf{1}_{k \leq n},$$

则 $\mu_n(E) \rightarrow \mu(E) = 0$ (对任意有限集 E), 但对 $E = \mathbb{N}$, $\mu_n(\mathbb{N}) = 1$, 故 $\mu(\mathbb{N}) = 1$ 。

此时 $E_k = \{k\}$ 互不相交, $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \mathbb{N}$, 但

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = 1 \neq 0 = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k),$$

不满足可列可加性, 故 μ 不是测度。

9. 设 $R_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 是集 X 上一列环, 并且 $R_1 \subset R_2 \subset \dots \subset R_n \subset \dots$. 又设 μ_n 是 R_n 上测度, 并且对任何 $E \in R_n$, 当 $m \geq n$ 时, $\mu_m(E) = \mu_n(E)$ (通常称为 $\{\mu_n\}$

在 $\{R_n\}$ 上是符合的). 证明 (i) $R = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$ 是 X 上的环. (ii) 定义 R 上函数 μ : 对每个 $E \in R$, 必存在某个 $n, E \in R_n$, 规定 $\mu(E) = \mu_n(E)$, 证明 μ 是 R 上非负、空集上取值为 0 的有限可加集函数 (μ 未必是 R 上测度, 参见下面习题 10).

9. 证明: (i) 要证是环: 即对 " $\cup$ " " $-$ " 封闭

$A, B \in R$, 则 $A \in R_i, B \in R_j$ (不妨设 $i < j$)

则 $A \in R_i \subset R_j$. R_j 是环: $A \cup B \in R_j, A - B \in R_j$

则 $A \cup B \in R, A - B \in R$, 即对 " $\cup$ " 封闭

证 " $-$ " 同理

(ii) $n. E \in R_n$ 则 $\mu(E) = \mu_n(E), \mu(\emptyset) = \mu_n(\emptyset) = 0$

$$\mu(E) = \mu_n(E) \geq 0$$

有限可加: $E = \bigcup_{i=1}^k E_i, \bar{E}_i \in R, \exists n, E \in R_n, \mu(E) = \mu_n(E)$

$$\begin{aligned} \text{列 } E_i \in R_{\text{max}\{n_i\}_{i=1}^k} &= R_N, \quad \mu_N = \mu(E) \\ \mu(E) &= \mu_N(E) \quad \text{有“有限可加”的性质} \\ &= \mu_N\left(\bigcup_{i=1}^k E_i\right) = \sum_{i=1}^k \mu_N(E_i) = \sum_{i=1}^k \mu(E_i) \end{aligned}$$

§2.3. 5.23.

习 题 2.3

1. 设 X 是可列无限集, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, R 是 X 中有限子集所成的环. 对任何 $E \in R$, $\mu_1(E)$ 是 E 中点的个数, $\mu_2(E) = a\mu_1(E)$ (a 是常数). 证明 μ_1^* 、 μ_2^* 都是 $H(R)$ 上测度.

2. 设 R 是 X 的某些子集所成的 σ -环, μ 是 R 上的测度. 证明 $H(R)$ 上的集函数

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu(F) | E \subset F \in R\}, E \in H(R)$$

是由 μ 所引出的外测度.

3. 设 R 是 X 的某些子集所成的 σ -环, μ 是 R 上的测度. 作 $H(R)$ 上的集函数 μ_* 如下: 当 $E \in H(R)$ 时

$$\mu_*(E) = \sup\{\mu(F) | E \supset F \in R\}$$

称 μ_* 为 μ 所引出的内测度, 试讨论内测度的各种性质.

4. 设 R 是 X 的某些子集所成的代数, μ 是 R 上的测度并且 $\mu(X) < \infty$, 定义

$$\mu_*(E) = \mu(X) - \mu^*(X - E), E \in H(R)$$

称 μ_* 为内测度, 讨论 μ_* 的各种性质. 当 R 是 σ -代数时讨论这里的 μ_* 与第 3 题中定义的 μ_* 的关系.

2. 证明 = 要证: $\mu^*(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \mid E_i \in R, E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right\}$

由 R 是 σ -环, $F \in R$, 则存在 $E_i (i=1, 2, \dots)$ 使得

$F = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, E_i \in R$. 则 $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, E_i \in R$

$$\mu(F) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \xrightarrow[\text{可加性}]{\text{有限可加}} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

则: $\mu^*(E) = \inf\{\mu(F) \mid E \subset F \in R\}, E \in H(R)$

$$= \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \mid E_i \in R, E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right\}$$

由定义: μ^* 是由 μ 引出的外测度

3. 解: (v) $u_*(\varnothing) = \sup \{u(F) \mid \varnothing \supset F \in \mathcal{R}\} = 0$

(vi) 非负性: $E \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$ $u_*(E) = \sup \{u(F) \mid E \supset F \in \mathcal{R}\}$
 $u(F) \geq 0$ 则 $u_*(E) \geq 0$

(vii) 单调性: $E_1, E_2 \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$ 且 $E_1 \subset E_2$

则 $u_*(E_1) \leq u_*(E_2)$

(v) $u_*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$

(vi) 对于 $E \in \mathcal{R}$, $u^*(E) = u^{\#}(E)$

$\geq \sum_{n=1}^{\infty} u_*(E_n)$

5. 设 X 是一集, $\mathcal{R}$ 是 X 的某些子集所成的 σ -代数, μ 是 $\mathcal{R}$ 上的有限测度, μ_* 是 $\mathcal{H}(\mathcal{R})$ 上的内测度: 当 $E \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$ 时 $\mu_*(E) = \sup \{\mu(F) \mid E \supset F \in \mathcal{R}\}$.

证明 $E \in \mathcal{R}^*$ 的充要条件是 $\mu^*(E) = \mu_*(E)$.

6. 设 $\mathcal{R}$ 是 X 的某些子集所成的环, μ 是 $\mathcal{R}$ 上测度. 任取 $E \subset X$, 记 $\mathcal{R}_E = \{F \mid F \in \mathcal{R}, F \subset E\}$, μ_E 是 μ 在环 $\mathcal{R}_E$ 上的限制. $\mathcal{R}_E^*$ 、 μ_E^* 是 $\mathcal{R}_E$ 上 μ_E 按 Caratheodory 条件的扩张. 举例说明 $\mathcal{R}_E^* \neq \mathcal{R}^* \cap E$.

7. 举例说明环 $\mathcal{R}$ 上测度 μ 按 Caratheodory 条件所得的扩张 $\mathcal{R}^*$ 、 μ^* 并不一定是 $\mathcal{R}$ 、 μ 的最大扩张.

8. 设 $\mathcal{R}$ 是 X 的某些子集所成的环, μ 是 $\mathcal{R}$ 上的测度.

(i) 证明 μ -零集全体是 $\mathcal{R}$ 的子环, 并举例说明不必是 σ -环.

(ii) 举例说明 $\mathcal{R}$ 虽不是 σ -环, 但 μ -零集全体却是 σ -环.

(iii) 如果 $\mathcal{R}$ 是 σ -环, 那么 μ -零集全体必是 σ -环.

9. (i) 证明定理 2.3.7 中 $\mathcal{R}^*$ 中 E 可以表示成 $E = (F - N_1) \cup N_2$ ($F \in \mathcal{S}(\mathcal{R})$, $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$) 或者 $E = F \Delta N$ ($F \in \mathcal{S}(\mathcal{R})$, $N \in \mathcal{N}$).

(ii) 去掉 μ 是 $\mathcal{R}$ 上 σ -有限的假设. 证明定理 2.3.4—2.3.6 对 $\mathcal{R}^*$ 中 σ -有限集 E 成立.

5. 证明:

§2.4

习题 2.4

1. 证明 $[0,1]$ 上 Cantor 集的 Lebesgue 测度是零.2. 设 $g(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增加右连续函数, L^g 是关于 g 的 Lebesgue-Stieltjes 可测集类, g 是 L^g 上 Lebesgue-Stieltjes 测度. 证明

(i) $g(\{a\}) = g(a) - g(a-0)$; $g((a, b)) = g(b-0) - g(a)$; $g([a, b]) = g(b) - g(a-0)$; $g([a, b)) = g(b-0) - g(a-0)$; 当开集 $O = \bigcup_{\nu} (a_{\nu}, b_{\nu})$ ($\{(a_{\nu}, b_{\nu})\}$ 是 O 的构成区间全体) 时, $g(O) = \sum_{\nu} (g(b_{\nu}-0) - g(a_{\nu}))$.

(ii) 引理 2. 定理 2.4.5—2.4.9 对于 L^g 、 g 也成立.3. (i) 视 $f(x) = x^3$ 为 $(-\infty, +\infty) \rightarrow (-\infty, +\infty)$ 的映照. 证明 $f(x)$ 把直线上 Lebesgue 可测集 (测度是零的集) 映射成 Lebesgue 可测集 (测度是零的集).(ii) 视 $f(x) = x^2$ 为 $(-\infty, +\infty) \rightarrow (-\infty, +\infty)$ 的映照. 证明对于 $f(x)$, (i) 中结论也成立.4. 设 $g(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增加右连续函数. 证明 $g(x)$ 能够产生出 Lebesgue 可测集类 L 上的测度 g , 并且存在常数 α , 对一切 $E \in L$, $g(E) = \alpha m(E)$ 成立的充要条件是 $g(x) = \alpha x + c$, 这里 c 是常数.

$$\begin{aligned} 2. (i) \quad ① \quad a &= \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, a], \quad g(a) = g\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, a]\right) \\ &= g\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (a - \frac{1}{n}, a]\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(a - \frac{1}{n}, a] \\ &= g(a) - \lim_{n \rightarrow \infty} g(a - \frac{1}{n}) = g(a) - g(a-0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ② \quad g((a, b)) &= g((a, b]) - g([a, b)) = g(b) - g(a) - (g(b) - g(b-0)) \\ &= g(b-0) - g(a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ③ \quad g([a, b]) &= g(a, b] + g([a, a]) = g(b) - g(a) + g(a) - g(a-0) \\ &= g(b) - g(a-0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ④ \quad g([a, b)) &= g(a, b) + g([a, a]) = g(b-0) - g(a) + g(a) - g(a-0) \\ &= g(b-0) - g(a-0) \end{aligned}$$

3. (ii) 对 $(0, a)$, $a > 0$, $(0, a) \mapsto (0, a^2)$, 开区间 $\mapsto$ 开区间

可测集 = Borel + 零 = Borel - 零

设 E 为一零测集 $E \subset (0, +\infty)$

$$\text{例 存在 } \{I_k\} \supset \bar{E} \quad m(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < \varepsilon, \quad I_k = (a_k, b_k) \\ f(I_k) = (a_k^2, b_k^2) \quad |b_k^2 - a_k^2| = |(b_k - a_k)(a_k + b_k)| \leq C \varepsilon$$

例 $m(f(U)) = 0$ 即: 零测集 $\rightarrow$ 零测集

$E \subset (-\infty, 0)$ 或其它情况可分类讨论.

$$4. \text{证: } \textcircled{1} \Rightarrow \text{考虑 } (0, x], \quad g((0, x]) = g(x) - g(0) = \alpha \cdot x$$

$$\Rightarrow g(x) = \alpha x + g(0) \text{ 即 } g(x) = \alpha x + c$$

$$\textcircled{2} \Leftarrow \quad g((a, b]) = g(b) - g(a) = \alpha b + c - (\alpha a + c) = \alpha(b - a) = \alpha m((a, b])$$

5. 定义 2.4.4 设 E 是直线上 Lebesgue 可测集, $x_0 \in E$. 又设 (a, b) 是包含 x_0 的任一开区间. 如果下列极限存在

$$d = \lim_{(a,b) \rightarrow x_0} \frac{m((a,b) \cap E)}{b-a},$$

称 d 是 E 在点 x_0 的密度. 显然 $0 \leq d \leq 1$. 如果 $d = 1$, 称 x_0 是 E 的全密点.

(i) 点 a 是否是 $E = [a, b]$ 的有密度的点.

(ii) 作一个集 E , 使它在给定点 x_0 具有密度, 并且密度等于事先给定的值 c ($0 < c < 1$).

6. 将习题 5 的定义中的 Lebesgue 测度换为 Lebesgue-Stieltjes 测度 g , 同样引入 (相对于 g 的) 密度

$$d = \lim_{(a,b) \rightarrow x_0} \frac{g((a,b) \cap E)}{g((a,b))}, \quad (g((a,b)) \neq 0)$$

和 (相对于 g 的) 全密点概念.

试同样讨论习题 5 中的 (i)、(ii).

7. 设 E 是直线上 Lebesgue 可测集, 并且 $m(E) \neq 0$. 证明: 对任何 c ($0 < c < 1$), 必存在 (a, b) , 使得

$$\frac{m(E \cap (a, b))}{b-a} > c.$$

此外, 证明上述结论对 Lebesgue-Stieltjes 测度也有类似结果 (将 $m(E \cap (a, b))$ 换成 $g(E \cap (a, b))$, $b-a$ 换成 $g((a, b))$).

8. 设 $g_1(x), g_2(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 处处可微的函数, 并且 $0 \leq \frac{d}{dx}g_1(x) \leq \frac{d}{dx}g_2(x)$ 处处成立. 证明 g_2 测度的零集必是 g_1 测度的零集.

9. 举例说明引理 2 中的开集 O 不能换为闭集.

证: E 是 Lebesgue 可测集, 则存在一开集 G 使 $G \subset E$

$$m(G - E) < \varepsilon \quad \text{即} \quad m(G) - m(E) < \varepsilon, \quad m(G) < m(E) + \varepsilon$$

$$m(G) < m(E) \left(1 + \frac{\varepsilon}{m(E)}\right) = m(E)(1 + \varepsilon_1)$$

$$G = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i) \quad (i=1, 2, \dots)$$

$$\text{记 } E_i = (a_i, b_i) \cap E$$

$$\text{则: } \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) < \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)(1 + \varepsilon_1)$$

$$\text{则必有} - \text{个} i \text{ 使得 } (b_i - a_i) < m(E_i)(1 + \varepsilon)$$

$$\text{即: } \frac{m(E_i)}{b_i - a_i} > \frac{1}{1 + \varepsilon} \quad \text{取 } (a_i, b_i) \text{ 为 } (a, b)$$

$$\text{则可得: } \frac{m(E \cap (a, b))}{b - a} > \frac{1}{1 + \varepsilon} > c \quad \#$$

8. 证明: 任取 g_2 测度的零集 E

$$\text{即: } g_2(E) = 0 = \int_E \frac{d}{dx}g_2(x) dx$$

$$0 \leq g_1(x) = \int_E \frac{d}{dx}g_1(x) dx \leq \int_E \frac{d}{dx}g_2(x) dx$$

$$\text{则 } g_1(E) = 0 \quad \#$$

#

10. 试作一个 Borel 集 E , 使得对任何开区间 (a, b) 都有 $m(E \cap (a, b)) > 0, m(E^c \cap (a, b)) > 0$.

11. 令 O 是直线上开集全体, F 是直线上有界闭集全体. 作 $O \cup F$ 上的集函数 μ 如下: 当 $\{(a_\nu, b_\nu)\}$ 是互不相交的开区间时,

$$\mu\left(\bigcup_{\nu} (a_\nu, b_\nu)\right) = \sum_{\nu} (b_\nu - a_\nu).$$

当 $F \in F$ 时, 如果 $F \subset (a, b)$, 那么规定 $\mu(F) = b - a - \mu((a, b) - F)$. 对一切直线上的有界集 E , 定义

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu(O) \mid E \subset O, O \in O\}, \quad \mu_*(E) = \sup\{\mu(F) \mid E \subset F, F \in F\}$$

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) | E \subset U, U \in \mathcal{O}\}, \mu_*(E) = \sup\{\mu(F) | F \subset E, F \in \mathcal{F}\}.$$

当 $\mu^*(E) = \mu_*(E)$ 时, 称 E 是可测集. 令 $\mathcal{L}'$ 是可测集全体. 证明 $\mathcal{L}'$ 是 $\mathcal{L}$ 中有界集全体, 而且在 $\mathcal{L}'$ 上 $\mu^* = \mu_* = m$.

12. 设 E 是直线上 Lebesgue 可测集, 对每个 E , 作平面上的集 $\tilde{E} = \{(x, y) | -\infty < x < \infty, y \in E\}$, 令 $\mathcal{R} = \{\tilde{E} | E \text{ 是直线上 Lebesgue 可测集}\}$. 在 $\mathcal{R}$ 上作集函数 $\tilde{m}$ 如下: 对任何直线上 Lebesgue 可测集 E ,

$$\tilde{m}(\tilde{E}) = m(E).$$

问: $\tilde{m}$ 是否是完全测度? $\mathcal{R}^*$ 是怎样的集类?

13. 证明 Lebesgue 可测集经反射变换 $x \mapsto -x$ 仍是 Lebesgue 可测集, 而且 Lebesgue 测度不变.

14. E 是 Lebesgue 可测集. 如果对一切实数 $a, m(\tau_a E \cap E) = 0$, 那么 $m(E) = 0$.

15. 设 g 是 Borel 集类 $\mathcal{B}$ 上的 Lebesgue-Stieltjes 测度, 而且对任何实数 a , 总有

$$g(\tau_a E) = g(E), E \in \mathcal{B}.$$

证明必存在非负数 c , 使得对一切 $E \in \mathcal{B}, g(E) = cm(E)$.

16. 设 m 是平面上的 Lebesgue 测度, u_θ 是平面上的一个映照 (旋转): $(x, y) \mapsto (x', y')$,

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta, y' = -x \sin \theta + y \cos \theta.$$

证明: 对平面上任何 Lebesgue 可测集 $E, u_\theta E$ 也是 Lebesgue 可测集, 而且 $m(u_\theta E) = m(E)$.

13. 证明: $f(x) = -x$. 对于开区间 $(\alpha, \beta) \xrightarrow{f} (-\beta, -\alpha)$

① $m(I) = m(f(I))$. 对于开区间, f 作用后 m 不变

② 对于零测集, E 有一列开集 $\{O_n\}$ $O_n \supset E$.

且当 $n \rightarrow \infty$ 时 $m(O_n) \rightarrow 0$

$n \rightarrow \infty$ 时 $f(O_n) \supset f(E), m(f(O_n)) \rightarrow 0$

对于零测集成立.

可测: Borel + 零集.

对任意可测集 E , 有一列开集 $\{O_n\}$.

$O_1 \supset O_2 \supset O_3 \sim \supset O_n \supset \sim \supset E$.

使 $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n = E$ 是零测集, 即 $m(\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n - E) < \varepsilon$

$f(O_n)$ 是包含 $f(E)$ 的开集, 且 $m(f(\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n) - f(E)) < \varepsilon$

$f(E) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(O_n) - (\bigcap_{n=1}^{\infty} f(O_n) - f(E))$

开集 (Borel)

零测集

例 $f(E)$ 为可测集

即 E (可测) $\rightarrow f(E)$ 可测

$$m(f(E)) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(f(O_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(O_n) = m(E)$$

证

15. 设 g 是 Borel 集类 B 上的 Lebesgue-Stieltjes 测度, 而且对任何实数 a , 总有

$$g(\tau_a E) = g(E), E \in B.$$

证明必存在非负数 c , 使得对一切 $E \in B, g(E) = cm(E)$.

16. 设 m 是平面上的 Lebesgue 测度, u_θ 是平面上的一个映照 (旋转): $(x, y) \mapsto (x', y')$,

$$u_\theta = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta + y \sin \theta \\ -x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix}.$$

证明: 对平面上任何 Lebesgue 可测集 $E, u_\theta E$ 也是 Lebesgue 可测集, 而且 $m(u_\theta E) = m(E)$.

旋转不变性

15. 证明: 设 $F(x) = g(-\infty, x]$, 则 $g(a, b] = F(b) - F(a)$

$$g(a, b] = g(\tau_{-a}(0, b-a]) = g(0, b-a] = F(b-a) - F(0)$$

$g(a, b]$ 只依赖于长度 $b-a$.

$$h(t) = g(0, t] \quad h(t+s) = h(t) + h(s)$$

则 $h(t)$ 必为线性: $h(t) = ct$

$$g(a, b] = h(b-a) = c \cdot (b-a) = c \cdot m(a, b]$$

$$g(E) = c \cdot m(E)$$

16. 证明: 可测 = Borel + 零集

$$u_\theta = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

R_θ 正交矩阵, 则 u_θ 为双射

$$u_\theta: \text{Borel} \rightarrow \text{Borel}$$

零集 $\rightarrow$ 零集
可测 $\rightarrow$ 可测

严格证明:

?

Chap 3.

习 题 3.1

1. 设 $(X, \mathcal{R})$ 是可测空间, $E \subset X$, f 是 E 上可测函数. 证明: 对任何实数 a , $E(f = a)$ 是可测集.

2. 设 $(X, \mathcal{R})$ 是可测空间, $E_1, \dots, E_n$ 是有限个可测集. 证明: f 在 $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$ 上是可测的充要条件是 f 在每个 $E_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 上是可测的. 再证上述命题对于 $\{E_i\}$ 是一列可测集也是正确的.

3. 设 $(X, \mathcal{R})$ 是可测空间, $E \subset X$. 证明 f 是 E 上可测函数的充要条件是对一切有理数 r , $E(f \geq r)$ 是可测集.

3. 证明: " $\Rightarrow$ " f 是 E 上的可测函数.

由定义集 $E(c \leq f)$ 是 $(X, \mathcal{R})$ 上的可测集,

由 c 的任意性, $c_0 = r_0 \sim c_n = r_n \sim$

易得 $E(r \leq f)$ 是可测集

" $\Leftarrow$ " $E(f > r)$ 是可测集. 取单增的有理数列 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($r_1 < r_2 < \dots < r_n < \dots$)

必然可使 $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = c$, 则有: $E(f > c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f > r_n)$

由 $E(f > r)$ 是可测集, 即得 $E(f > c)$ 是可测集.

则 f 是 E 上可测函数.

4. 设 $(X, \mathcal{R})$ 是可测空间, $E \subset X$, f 是 E 上有界可测函数. 证明必存在可测集的特征函数线性组合形式的函数序列 $\{f_n\}$ 在 E 上一致收敛于 f , 并且 $|f_n(x)| \leq \sup_{x \in E} |f(x)| (n = 1, 2, 3, \dots)$.

5. 设 $(X, \mathcal{R})$ 是可测空间, $E \subset X$, f 是 E 上可测函数. 证明下列命题成立.

(i) 对直线上任何开集 O , $f^{-1}(O)$ 是可测集.

(ii) 对直线上任何闭集 F , $f^{-1}(F)$ 是可测集.

(iii) 对直线上任何 G_δ 型或 F_σ 型集 M , $f^{-1}(M)$ 是可测集.

(iv) 对直线上任何 Borel 集 M , $f^{-1}(M)$ 是可测集.

5. 证明: f 是 E 上的可测函数 $\Leftrightarrow E(c < f)$ 可测.

(i) 直线上开集 (a, b) . $f: E \subset X \rightarrow \mathbb{R}$

$$f^{-1}((a, b)) = E(a < f(x)) \cap E(f(x) < b) \text{ 可测}$$

值落在 (a, b) 的 x 全体

$$f^{-1}(O) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(a_n, b_n) \text{ 即为可测集}$$

(ii) ② 可测 E 为开集的并集. 列同样可得 $f^{-1}(F)$ 为可测集

(iii) G_δ 型: 可数个开集的交

$$f^{-1}(M) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}(O_n)$$

F_σ 型: 可数个闭集的并

$$f^{-1}(M) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(F_n)$$

(iv)

6. 设 $(X, \mathcal{R})$ 是可测空间, $E \subset X$, f 是 E 上可测函数. 又设 h 是直线上 Borel 可测函数, 证明 $h(f)$ 是 E 上可测函数.

7. 设 $(X, \mathcal{R})$ 是可测空间, $E \subset X$, $\{f_n\}$ 是 E 上一列有限的可测函数, 并且 $\{f_n\}$ 在 E 上处处收敛 (允许极限值是 $\pm\infty$). 证明 $E(f = +\infty)$, $E(f = -\infty)$ 都是可测集, 并且对任何实数 c , $E(f \geq c)$ 也是可测集.

7. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$. $\{f_n\}$ 有限可测. $E(c < f_n)$ 可测

$$\textcircled{1} E(f = +\infty) = \bigcap_{m=1}^{\infty} E(f > m), \text{ 对于 } f(x) > m, \text{ 即 } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) > m$$
$$\Downarrow \forall K \in \mathbb{N}^+, \exists N.$$

使得当 $n \geq N$ 时有 $f_n(x) > m - \frac{1}{K}$

$$E(f > m) = \bigcap_{K=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{n \geq N} E(f_n > m - \frac{1}{K}) \text{ 可测}$$

则 $E(f = +\infty)$ 可测

$$\textcircled{2} E(f = -\infty) = E(+f = +\infty), \quad +f = \lim_{n \rightarrow \infty} (-f_n)$$

列 $E(f = -\infty)$ 也为可测集

② m 可换成任意实数 c ，又 $E(f > m)$ 可测
即： $E(f > c)$ 可测。

12. 设 $f(x)$ 是直线上 Lebesgue (或 Borel) 可测函数。证明 $f(x^3)$, $f(x^2)$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$ (当 $x = 0$ 时, 规定 $f\left(\frac{1}{0}\right) = 0$) 等都是 Lebesgue (或 Borel) 可测函数。

12. 证明：由 $f(x)$ 是直线上 Lebesgue 可测函数。

列 $E(c \leq f(x))$ (记 E_c) 可测。

$f(x^3)$ 可测： $E(c \leq f(x^3))$ 可测
 $= \{x \mid x^3 \in E_c\}$

13. (i) 当 f 是 $[a, b]$ 上的连续函数、单调函数、阶梯函数时, f 必是 $[a, b]$ 上 Borel 可测函数.

(ii) 当 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上处处可微的函数时, 证明 $\frac{d}{dx} f(x)$ 必是 $(-\infty, +\infty)$ 上的 Borel 可测函数.

14. 设 X 是一个集, $\{f_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ 是定义在 X 上的一族有限实函数, $\mathcal{R}$ 是由 X 的某些子集所成的 σ -环.

证明 $\mathcal{R}$ 是使得一切 $f_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ 都可测的最小 σ -代数的充要条件是 $\mathcal{R}$ 是包含一切 $X(r < f_\lambda) (\lambda \in \Lambda)$ 的最小 σ -代数, 这里 r 遍取有理数.

13. 证: (1) 连续: $E(f > c)$ 是开集
 Borel 可测 $\Leftarrow$ $\begin{cases} \text{单调 (不一定为单增)}: E(f > c) = [\alpha, \beta) \text{ 或 } (\alpha, \beta] \\ \text{阶梯函数}: E(f > c) \text{ 是若干区间的并} \end{cases}$
 (2) $\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$
 $f(x)$ 处处可微 $\Rightarrow \{f_n(x)\}$ 是一列 Borel 函数

14. 证明:

§ 3.3

习 题 3.3

1. 证明, 对 $[a, b]$ 上非负连续函数 f , 如果 $\int_a^b f(x)dx = 0$, 那么 $f(x) \equiv 0$. 如果 Lebesgue 积分换成 Lebesgue-Stieltjes 积分, 结果如何?

2. 设 f, g 是 $(X, \mathcal{R}, \mu)$ 上可积函数, 那么 $\sqrt{f^2 + g^2}$ 也是 $(X, \mathcal{R}, \mu)$ 上可积函数.

3. 证明定理 3.3.13 中 $-\infty < a, b < +\infty$, 而 φ 换为 $[a, b]$ 上多项式 $p(x)$ 或三角多项式也是可以的, 但如果 $[a, b]$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 时, 问阶梯函数类、多项式函数类、三角多项式函数类中哪一个类能使定理 3.3.13 成立? 哪些类不能成立? 为什么?

1. ① Lebesgue 积分: 基于 Lebesgue 测度用标准长度来衡量实数轴上的区间. 如 $m([a, b]) = b - a$.

② Lebesgue-Stieltjes 积分: 基于 Lebesgue-Stieltjes 测度. 由一个单增右连续的函数生成.

证明: 反证, 若 $f(x)$ 不恒等于 0, 则在 $x_0 \in [a, b]$, $f(x_0) > 0$.

因为 $f(x)$ 连续, 在 x_0 处连续, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得

对于 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$$-\varepsilon < f(x) - f(x_0) < \varepsilon$$

$$0 < f(x_0) - \varepsilon < f(x) \quad \text{则} \quad \int_a^b f(x) dx > \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} f(x) dx > \delta \cdot (f(x_0) - \varepsilon) > 0.$$

这与题目条件矛盾. 假设不成立, 得 $f(x) \equiv 0$.

对于 2-3 积分, 由于 $g([a, b])$ 可能取到 0.

所以 $f(x)$ 不一定恒等于 0.

2. 证明: f, g 是 $(X, \mathcal{R}, \mu)$ 上的可积函数.

则 f, g 可测且 $\int_X |f| d\mu < \infty$, $\int_X |g| d\mu < \infty$.

对 $\sqrt{f^2 + g^2} \leq |f| + |g|$, 由 f, g 可测, 则

$\sqrt{f^2 + g^2}$ 也可测.

$$\int_X |f| + |g| d\mu = \int_X |f| d\mu + \int_X |g| d\mu < \infty.$$

则 $|f| + |g|$ 可积.

又 $\sqrt{f^2 + g^2} \leq |f| + |g|$. 且 $\sqrt{f^2 + g^2}$ 可积

则 $\sqrt{f^2 + g^2}$ 在 $(X, \mathcal{R}, \mu)$ 上可积.

4. 设 f 是 $[a, b]$ 上 Lebesgue 可积, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} \int_a^b f(x) |\sin nx| dx = \int_a^b f(x) dx,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} \int_a^b f(x) |\cos nx| dx = \int_a^b f(x) dx.$$

4. 证明:

5. 如果

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^a}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad (a > 0)$$

讨论 a 为何值时, f 是 $[0, 1]$ 上 Lebesgue 可积函数或不可积函数.

如果

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin \frac{1}{x}}{|x|^a}, & |x| > 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad (a > 0)$$

讨论 a 为何值时, f 是 $(-\infty, +\infty)$ 上 Lebesgue 可积或不可积.

5. 解: $\left| \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^a} \right| < \frac{1}{x^a}$, 则若 $\frac{1}{x^a}$ 可积则 $f(x)$ 可积.

① $\int_{(0,1]} \frac{1}{x^a} dx$ 当 $0 < a < 1$ 时 $\frac{1}{x^a}$ 可积.

② $a=1$ 时 $\frac{\sin \frac{1}{x}}{x}$ 在 $[0, 1]$ 上不可积.

③ $a > 1$ 时 $\left| \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^a} \right| > \left| \frac{\sin \frac{1}{x}}{x} \right|$ 则 $\frac{\sin \frac{1}{x}}{x^a}$ 不可积.

即: $0 < a < 1$ $f(x)$ 可积, $a \geq 1$ $f(x)$ 不可积.

对于第2个函数 $f(x)$ 是奇函数, 只讨论 $(0, +\infty)$ 上
与第1个函数相同

6. 当 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上 Lebesgue 可积函数时, 证明对任何 t , $f(x+t)$ 也是 Lebesgue 可积的, 但如果 f 是 (E^1, L^g, g) 上可积函数时, 问 $f(x+t)$ 是否在 (E^1, L^g, g) 上可积? 为什么?

6. 证明: ① $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上可积函数.

$$\text{则 } \int_a^b f(x) dx < \infty$$

$$\int_a^b f(x+t) dx = \int_{a+t}^{b+t} f(x+t) dx = \int_{a+t}^{b+t} f(x) dx < \infty$$

则 $f(x+t)$ 也是 Lebesgue 可积的

$$\text{② } \int_a^b f(x+t) dg \quad (?)$$

7. 当 f 是 $(-\infty, +\infty)$ 上 Lebesgue 可积函数时, 证明

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx = 0.$$

如果 f 是 (E^1, L^g, g) 上可积函数时, 上式是否成立? 为什么?

7. 证明:

10. 设 E 是测度空间 $(X, \mathbf{R}, \mu)$ 上测度有限的集. 证明 f 在 E 上可积的充要条件是 $\sum_{n=1}^{\infty} n\mu(E_n) < \infty$, 其中 $E_n = E(n \leq |f| < n+1)$.

10. 证明:

" $\Rightarrow$ " f 在 E 上可积. 则 $|f|$ 在 E 上可积. $\int_E |f| d\mu < \infty$

$$E = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n. \quad \int_E |f| d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{E_n} |f| d\mu < \infty$$

在 E_n 上 $n \leq |f| < n+1$.

$$\text{则 } \sum_{n=0}^{\infty} \int_{E_n} |f| d\mu \geq \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \mu(E_n)$$

$$\text{则 } \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} n \mu(E_n) < \infty$$

$$" $\Leftarrow$ " $\sum_{n=1}^{\infty} n \mu(E_n) < \infty \Rightarrow \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \mu(E) < \infty$$$

$$\int_E |f| d\mu = \int_E (0 \leq |f| < 1) |f| d\mu + \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} |f| d\mu$$

$$\leq 1 \cdot \mu(E) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} |f| d\mu$$

$$\leq \mu(E) + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \mu(E_n)$$

$$= \mu(E) + \sum_{n=1}^{\infty} n \mu(E_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$$

则得 $\int_E |f| du < \infty$, $|f|$ 在 E 上可积. f 在 E 上可积.

习 题 3.4

1. 证明级数形式的 Levi 引理 (即课文中的定理 3.4.5").

2. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上满足 $f(0) = 0$ 的 Lebesgue 可积函数, 证明 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n^2 x)$ 必在 $(-\infty, +\infty)$ 上几乎处处 (按 Lebesgue 测度) 等于一个 Lebesgue 可积函数.

3. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上满足 $f(0) = 0$ 而关于 (E^1, L^g, g) 的可积函数. 试举出一个 g , 说明习题 2 对于 g 测度是不成立的.

2. 证明: $f(n^2 x) = f((-n)^2 x)$ $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n^2 x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} f(n^2 x)$

$f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上 Lebesgue 可积.

令 $u_n(x) = |f(n^2 x)|$ 可积

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(n^2 x)| dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(n^2 x)| dn^2 x$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)| dy \quad \text{由于 } f \text{ 可积 } \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)| dy < \infty$$

又: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(n^2 x)| dx < \infty$

则由 Levi 引理, $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n^2 x)|$ 几乎处处收敛于

E 上 - 个可积函数 g .

$$\text{又: } \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n^2 x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} f(n^2 x) \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} |f(n^2 x)|$$

则 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n^2 x)$ 几乎处处等于 1 个 Lebesgue 可积函数.

4. 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{\frac{dx}{dt} dt}{\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n t^{\frac{1}{n}}} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{\log^p(x+n)}{n} e^{-x} \cos x dx = 0,$$

p 为任意固定正数.

4. 证明: (1) 设 $f_n = \frac{1}{(1+\frac{t}{n})^n t^{\frac{1}{n}}}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = e^{-t}$

$$t \in (0, 1), n \geq 2 \text{ 时 } \frac{1}{t^{\frac{1}{n}}} < t^{-\frac{1}{2}}, \text{ 且 } \frac{1}{(1+\frac{t}{n})^n} < \frac{1}{1+t}$$

$$\text{则 } f_n(t) < \frac{1}{1+t} \cdot t^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(1+t)t^{\frac{1}{2}}} < \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \text{ 则在 } (0, 1) \text{ 上可积}$$

$$t \in (1, +\infty), n \geq 2 \text{ 时 } \frac{1}{t^{\frac{1}{n}}} < 1, \frac{1}{(1+\frac{t}{n})^n} < \frac{1}{1+t}$$

$$\text{则 } f_n(t) < \frac{1}{1+t} \rightarrow \text{在 } (1, +\infty) \text{ 上可积}$$

则可得到 $\{f_n(t)\}$ 的控制函数

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^2} & t \in (0,1) \\ \frac{1}{1+t} & t \in (1,+\infty) \end{cases} \quad \text{在 } (0,+\infty) \text{ 上可积}$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = e^{-t}$, 由控制收敛定理

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$$

$$\text{证: } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+\frac{t}{n})^n t^{\frac{1}{n}}} = 1.$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{\log^P(x+n)}{n} e^{-x} \cos x dx = 0. \quad P \text{ 为任意固定正数}$$

$$\text{证: 设 } f_n(x) = \frac{\log^P(x+n)}{n} e^{-x} \cos x.$$

$$|f_n(x)| \leq \left| \frac{\log^P(x+n)}{n} e^{-x} \right|$$

$$\log(x+n) \leq \log(1+x) + \log(1+n)$$

$$0 < P \leq 1 \text{ 时 } \log^P(x+n) \leq (\log(1+x) + \log(1+n))^P$$

$$P > 1 \text{ 时 } \log^P(x+n) \leq \frac{P-1}{n} (\log^P(1+x) + \log^P(1+n))$$

$$(a+b)^P \leq 2^{P-1} (a^P + b^P)$$

$$f_n(x) \leq C_P \frac{\log^P(1+x) + \log^P(1+n)}{n} e^{-x}$$

$$\leq C_P (\log^P(1+x) + M_P) e^{-x}$$

$$M_P = \sup_{n \geq 1} \left\{ \frac{\log^P(1+n)}{n} \right\} = \log^P 2 < \infty$$

x 较小时 $f_n(x) < \infty$

$x \rightarrow +\infty$ 时 e^{-x} 更小 $f_n(x) < \infty$

例. $C_p(\log^p(1+x) + M_p)e^{-x}$ 是 $F_n(x)$ 的控制函数
 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$
 例 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f_n(x) dx = \int_0^{\infty} 0 dx = 0$. $\square$

5. 设 $f(x)$ 在 $(0, \infty)$ 上 Lebesgue 可积, 并且 均匀连续, 那么 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. 举例说明均匀连续条件不可去掉.
 - 一致连续

5. 证明: 反证法. 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \neq 0$, 则 $\exists \varepsilon_0 > 0$, 和趋于 ∞ 的序列 $\{x_n\}$ 使得 $|f(x_n)| > \varepsilon_0$, 又 $f(x)$ 一致连续, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 对 $x', x'' \in (0, +\infty)$ $|x' - x''| < \delta$, 有 $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon_0}{2}$.
 对于 $x \in (x_1 - \delta, x_1 + \delta)$, $|f(x)| = |f(x) + f(x_1) - f(x_1)|$
 $= |f(x) - (f(x) - f(x_1))| \geq |f(x)| - |f(x) - f(x_1)| > \frac{\varepsilon_0}{2}$
 $(x_1 - \delta, x_1 + \delta), (x_2 - \delta, x_2 + \delta), \dots, (x_n - \delta, x_n + \delta), \dots$
 $\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} (x_n - \delta, x_n + \delta)} |f(x)| dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} 2\delta \cdot \frac{\varepsilon_0}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \delta \varepsilon_0 \rightarrow \infty$

$f(x)$ 可积, $|f(x)|$ 可积. 矛盾, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

例:

6. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上 Lebesgue 可测, 并且在任何有限区间 (a, b) 上可积, 而且 $h(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有 n 阶连续导函数, 在 $[-M, M]$ 外为零. 证明下面的函数

$$(f * h)(t) = \int f(x+t)h(x)dx$$

是 t 的具有 n 阶导数的函数.

证明: 设 $g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)h(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)h(u-t)du$.

$$① \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{g(t+\delta t) - g(t)}{\delta t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(u)[h(u-t-\delta t) - h(u-t)]}{\delta t} du$$

$h(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有 n 阶连续导函数. 则 $\frac{h(u-t-\delta t) - h(u-t)}{\delta t}$ 是有界的 $< \infty$ 则 $f(u) \cdot \frac{h(u-t-\delta t) - h(u-t)}{\delta t} < f(u) \sup_{|x| \leq M+|\delta t|+1} |h'(x)|$

由控制收敛定理 $\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{f(u)[h(u-t-\delta t) - h(u-t)]}{\delta t} = -f(u)h'(u-t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可积.

$$\text{则 } g'(t) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)h'(u-t) du < \infty$$

即: $g'(t)$ 存在. $g(t)$ 是可导.

② 接下来证 n 阶可导, 用归纳法.

$$g^{(k)}(t) = (-1)^k \int f(u)h^{(k)}(u-t) du \quad k \leq n$$

$$\text{考虑 } \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{g^{(k)}(t+\delta t) - g^{(k)}(t)}{\delta t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} (-1)^k \int f(u) \frac{h^{(k)}(u-t-\delta t) - h^{(k)}(u-t)}{\delta t} du$$

$$\text{同样可得 } g^{(k+1)}(t) = (-1)^{k+1} \int f(u)h^{(k+1)}(u-t) du$$

$k=1 \sim n$ 均成立. 则 $g(t)$ 是 t 的有 n 阶导数的函数.

(10) 设 $\{f_n\}$ 是测度空间 $(X, \mathcal{R}, \mu)$ 的集 E 上可测函数列, 如果 (i) 存在 E 上可积函数 F , 使得 $|f_n| \leq F$ ($n=1, 2, 3, \dots$); (ii) $\{f_n\}$ 在 E 上几乎处处收敛于可测函数 f . 那么必有 $f_n \xrightarrow{\mu} f$. 控制收敛

证明: $f_n \leq |f_n| \leq F, f_n \rightarrow f, |f_n - f| \leq 2F, |f_n - f| \xrightarrow{\mu} 0$.

由控制收敛定理: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E |f_n - f| d\mu = \int_E 0 d\mu = 0$.

$$\text{又: } \int_E |f_n - f| d\mu \geq \mu(\{f_n - f > \varepsilon\}) \cdot \varepsilon$$

$$\text{则 } \mu(\{f_n - f > \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_E |f_n - f| d\mu$$

$$\text{两边同时对 } n \text{ 取极限: } \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{f_n - f > \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E |f_n - f| d\mu$$

$$\text{则 } \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{f_n - f > \varepsilon\}) = 0$$

即: $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

12. 设 $(X, \mathbf{R}, \mu)$ 是全 σ -有限测度空间, $f(x)$ 是 $(X, \mathbf{R})$ 上非负实可测函数. 如果允许“积分”取无限大值, 那么

$$\nu(E) = \int_E f d\mu, E \in \mathbf{R}$$

是 $(X, \mathbf{R})$ 上全 σ -有限测度, 并且对每个 E , 如果 $\mu(E) = 0$, 必有 $\nu(E) = 0$.

12. 证明: (1) ① f 非负, 则 $f \geq 0, \int_E f d\mu \geq 0$.

$$0 \leq \nu(\emptyset) = \int_{\emptyset} f d\mu \leq \mu(\emptyset) \sup f = 0.$$

$$\text{则 } \nu(\emptyset) = 0.$$

② 由 ① 中 $\nu(\emptyset) \geq 0$, 非负性得证.

③ 一列 $E_i, i=1, 2, 3, \dots, E_i \cap E_j = \emptyset$

$$\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i} f d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(E_i)$$

可列可加性得证

则 ν 是测度.

下面证 σ -有限: 已知 μ 是 σ -有限的, 存在一列 $\{X_n\}$

$$\text{使 } X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \text{ 且 } \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n\right) < +\infty$$

$$\text{令 } A_{n,k} = \{x \in X_n, f(x) \leq k\}, X = \bigcup_{n,k=1}^{\infty} A_{n,k}$$

$$\nu(A_{n,k}) = \int_{A_{n,k}} f d\mu \leq k \cdot \mu(A_{n,k}) < +\infty$$

则 ν 是 σ -有限测度.

$$(2) \nu(E) \leq \sup f \cdot \mu(E)$$

$$\mu(E) = 0 \Rightarrow \nu(E) = 0 \quad \square$$

§3.5 乘积测度

3. 设 A 是直线上 Lebesgue 可测集, 证明平面 $E^1 \times E^1$ 上的集 $E = \{(x, y) | x - y \in A\}$ 是 $(E^1 \times E^1, (\mathbf{L} \times \mathbf{L})^*, m \times m)$ 的可测集. 特别当 $m(A) = 0$ 时, 那么 $m \times m(E) = 0$.

(ds) ①

证明: 令 $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, f(x, y) = x - y$, f 连续, 则对 $\forall B \subset \mathbf{R}$, 原像 $f^{-1}(B)$

是 $\mathbf{R}^2$ 中的 Borel 集, $\in \mathbf{L} \times \mathbf{L}$. 由 A 是 Lebesgue 可测集.

则存在 Borel 集 B, C 使 $B \subset A \subset C$ 且 $m(C|B) = 0$.

则有 $f^{-1}(B) \subset E \subset f^{-1}(C)$, 从而 $E = \underbrace{f^{-1}(B)}_{\text{可测}} \cup (E \setminus f^{-1}(B))$

$E \setminus f^{-1}(B) \subset f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(C|B)$ 由 $m(C|B) = 0$

$$(m \times m)(f^{-1}(C|B)) = \int_{\mathbb{R}^n} m(\nu_x(C|B)) dx = 0$$

则 $E \setminus f^{-1}(B)$ 是零测集, 可测. $\therefore$ 则 E 可测

② $m(A) = 0$ 时取 $B = C$ 为包含 A 的 Borel 零测集. $m(C) = 0$

$$E \subset f^{-1}(C). \quad (m \times m)(f^{-1}(C)) = 0$$

5. 当 f, h 是直线上 Lebesgue 可积函数时, 证明函数

$$(f * h)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x)h(x)dx$$

是 $(-\infty, +\infty)$ 上 Lebesgue 可积函数, 并且 $\widetilde{f * h} = \tilde{f} \cdot \tilde{h}$. 又如果当 f, h 中有一个是有界 (不一定可积), 另一个可积, 那么 $(f * h)(t)$ 是 t 的连续函数.

又问, 如果将 Lebesgue 测度换为一般测度, 上述结论是否成立? 为什么?

5. 证明 =

6. 如果 $f(s, t)$ 是有限矩形 $[a, b] \times [c, d]$ 上的 Lebesgue 可积函数. 证明必可用 (i) 平面上阶梯函数^①, (ii) 平面上多项式, (iii) 平面上三角多项式按积分逼近, 即对任何 $\varepsilon > 0$ 必有上述三类函数中的每一个类中的一个函数 φ , 使得

$$\int_c^d \int_a^b |f - \varphi| dx dy < \varepsilon.$$

7. 设 P 是平面上左下开右上闭矩形全体, $R_0 = S(P)$, $S(P)$ 称为平面 Borel 集. 证明, 平面上开圆、闭圆、三角形、开平行四边形、可列集、扇形等均为 Borel 集.

6. 证明:

号3.6.

6. 设

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 + x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

由 φ 作函数 f : 当 $x \geq 0$ 时 $f(x) = \sqrt{x}\varphi(x)$; 当 $x < 0$ 时, $f(x) = -\sqrt{-x}\varphi(x)$. 问 $f(x)$ 在 $x=0$ 点导数是否存在?

6. 解: $h_n > 0$ 时 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(0+h_n) - f(0)}{h_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(h_n) - 0}{h_n}$
 $(\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{h_n}(1 + h_n \sin \frac{1}{h_n})}{h_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + h_n \sin \frac{1}{h_n}}{\sqrt{h_n}}$

$h_n < 0$ 时 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(0+h_n) - f(0)}{h_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\sqrt{-h_n}(1 + h_n \sin \frac{1}{h_n})}{h_n}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + h_n \sin \frac{1}{h_n}}{\sqrt{-h_n}}$

极限都 $\rightarrow +\infty$ 列在 $x=0$ 点的导数不存在.

8. 设 α 是一实数, 函数

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

在 α 取什么值时, f 是 $[0, 1]$ 上的有界变差函数? $\alpha > 1$.

解: 在 $[0, 1]$ 取分点 $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$.

$$V(f; x_0 \sim x_n) = \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^n |x_i^\alpha \sin \frac{1}{x_i} - x_{i-1}^\alpha \sin \frac{1}{x_{i-1}}|$$

